多値論理素子が細分的であるための条件 (情報科学の数学的理論)

丸岡, 章; 本多, 波雄

数理解析研究所講究録
156巻 1972年 34-50

多値論理素子が細分的であるための条件

東北大 工学部 丸岡 章
東北大 通研 本多 波雄

§1. まえがき

n入力－1出力多値論理素子のn個の入力端子および1個の出力端子上に加えられる信号の集合をそれぞれ$V^{(1)},\cdots,V^{(n)}$，Uで表わす．ここで考える素子は，写像$\varphi: V^{(1)}\times\cdots\times V^{(n)}\to U$で表わされるすべての論理機能（以下構造という）をとることができる可変論理素子である．$|V^{(1)}|=\gamma^{(1)},\cdots,|V^{(n)}|=\gamma^{(n)}$，$|U|=\lambda$である素子を$(\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(n)})_\lambda$素子または単に$(\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(n)})$素子と表わす（$|S|$は集合$S$の大きさを表わす）．$V^{(\nu)}$上のすべての変換からなる集合を$T^{(\nu)}$で表わし，$T=T^{(1)}\times\cdots\times T^{(n)}$とおく．恒等変換を$e$と表わす．$t\in T$に対して，$\varphi=t\varphi$ならば$t=e$となるとき，$\varphi$を細分的という．さらに素子が少くともひとつの細分的構造をとりうるとき，その素子を細分的という．この報告は，素子が細分的であることと可変論理回路との関連についてのべ，$(\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(n)})_\lambda$素子

が細分的であるための$\zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(n)}, \lambda$に関する必要十分条件を求めるものである.

§2. 可変論理回路との関連

集積回路の標準化の立場から，可変論理方式が提案されている. ここで，可変論理回路とは，素子間の接続パタンと入力端子への入力変数の割当ては固定されているが，その回路を構成する素子の論理機能は可変である回路と考える. このような回路で所要の論理関数を実現しようとする可変論理方式に関連して，次のような基本的問題が生じる. すなわち，可変論理回路で実現可能なすべての関数の集合をうるための，各素子の必要十分な可変範囲は何かという問題である.

回路を構成するひとつの素子に注目した場合，この問題の必要十分な可変範囲は次のようになる[1]. Φを注目する素子のすべての構造からなる集合（すなわち，すべての写像：$V^{(1)}\times\cdots\times V^{(n)}\to U$ からなる集合）とする. Φに類別$\Phi/\mathfrak{F}$が定義され この類別が半順序集合となることが示される. 上述のひとつの素子に注目したときの必要十分な可変範囲は，半順序集合$\Phi/\mathfrak{F}$の極大類の代表元からなる集合となる.

上述の問題を回路全体に注目して考察する. 可変論理回路はμ個の素子から構成されているとし，それらの素子に1か

らμまでの番号をつける．一般性を失うことなく，1番からν番の素子に関して$N_0=\phi$であり，他の素子に関して$N_0\neq\phi$とする．ここで，ϕは空集合を表わし，$N_0\subseteq\{1,\cdots,n\}$は前段で他の素子の出力端子に接続されている入力端子の番号からなる集合とする．Φ_ξをξ番目の素子のすべての構造からなる集合とする．一般に，ξ番目の素子の可変範囲は，Φ_ξの部分集合$\Psi_\xi\subseteq\Phi_\xi$で表わされる．回路全体の可変範囲は，$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\mu$で表わされる．ここに，$\Psi_1\subseteq\Phi_1,\cdots,\Psi_\mu\subseteq\Phi_\mu$である．

定義1：可変範囲が$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\nu\times\Psi_{\nu+1}\times\cdots\times\Psi_\mu$，$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\nu\times\Psi'_{\nu+1}\times\cdots\times\Psi'_\mu$である回路が実現する出力論理関数の集合をそれぞれ$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}'$とする．$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\nu\times\Psi'_{\nu+1}\times\cdots\times\Psi'_\mu\subsetneq\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\mu$なる任意の可変範囲$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\nu\times\Psi'_{\nu+1}\times\cdots\times\Psi'_\mu$に対して，$\mathfrak{F}'\subsetneq\mathfrak{F}$のとき，可変論理回路の構造の可変範囲$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\mu$を臨界的という．

次の定理1は，$\Psi_1,\cdots,\Psi_\mu$をいずれも個々の素子に注目したとき実現可能なすべての出力論理関数の集合をうるための必要十分な可変範囲，すなわちそれぞれの素子の半順序集合$\Phi/\mathfrak{F}$の各極大類の代表元からなる集合とするとき，$\Psi_1\times\cdots\times\Psi_\mu$が臨界的となる十分条件を与えるものである．$N=\{1,\cdots,n\}$とおく．$N_0\subsetneq N$のときは，$N=N_0\cup\{i\}$，$\mathfrak{T}=T^{(1)}\times\cdots\times\overset{i}{\{e\}}\times\cdots\times T^{(n)}$，$N_0=N$のときは，$\mathfrak{T}=T^{(1)}\times\cdots\times T^{(n)}$とおく．

定義2：$t \in \mathfrak{T}$ に対して，$\varphi = t\varphi$ ならば $t = e$ となるとき，φ を細分的という．さらに，素子が少くともひとつの細分的構造をとりうるとき，その素子を細分的という．

定理1[2]：可変論理回路を構成する各素子が，それぞれの半順序集合 $\Phi/\mathfrak{F}$ の各極大類から1個ずつえらんだ代表元からなる集合にわたり可変であるとする．この可変論理回路を構成する $N_0 \ni \mu$ なる各素子が，(i) 細分的であり，かつ (ii) $(\lambda-1)\prod_{\mu \neq \nu} \tau^{(\mu)} < \tau^{(\nu)}$ なる $\nu \in N_0$ が存在するとき，その可変範囲は臨界的である．

定義2における $\mathfrak{T}$ は，$N = N_0 \cup \{j\}$ のときと，$N = N_0$ のときで異なる．次の定理は，一般に $N = N_0$ として細分的条件を求めても一般性を失わないことを示す．

定理2：$N_0 = \{1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n\}$ のとき，$(\tau^{(1)}, \cdots, \tau^{(n)})_\lambda$ 素子が細分的であるための必要十分条件は，$N_0 = \{1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n\}$ のとき，$(\tau^{(1)}, \cdots, \tau^{(j-1)}, \tau^{(j+1)}, \cdots, \tau^{(n)})_{\lambda\tau^{(j)}}$ 素子が細分的であることである．

定理2より，一般性を失うことなく $N = N_0$ と仮定して細分的条件を求める．したがって，定義2の代りに次の定義2′で細分的の定義をして議論をすすめる．

定義2′：$t \in T^{(1)} \times \cdots \times T^{(n)}$ に対して，$\varphi = t\varphi$ ならば $t = e$ なるとき，φ を細分的という．また，素子が少くともひとつ

の細分的構造をとりうるとき，その素子を細分的という．

§3　$n=2$ の場合の細分的条件を求めるアルゴリズム

補題3：任意の置換 $\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ \xi_1 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}$ に対して，$(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)})_\lambda$ 素子が細分的であれば $(\zeta^{(\xi_1)},\cdots,\zeta^{(\xi_n)})_\lambda$ 素子も細分的である．

$V^{(\nu)}$ 上のすべての置換からなる集合を $\Pi^{(\nu)}$ で表わし，$\Pi=\Pi^{(1)}\times\cdots\times\Pi^{(n)}$ とおく．次の定義3は定義2′と同値であることが証明される．

定義3：$\pi\in\Pi$ に対して，$\pi\varphi=\varphi$ ならば $\pi=e$ であるとき，φ を細分的という．

定義4：A の類別 A/e を，$a_1\equiv a_2\ (A/e)\Leftrightarrow a_1=a_2$ と定義する．

定義5：与えられた写像 φ に対して，$V^{(\nu)}$ の類別 $V^{(\nu)}/\!/\varphi$ を

$$v_1^{(\nu)}\equiv v_2^{(\nu)}\ (V^{(\nu)}/\!/\varphi)\Leftrightarrow \forall v^{(1)},\cdots,v^{(\nu-1)},v^{(\nu+1)},\cdots,v^{(n)},\ \varphi(v^{(1)},\cdots,v_1^{(\nu)},\cdots,v^{(n)}) = \varphi(v^{(1)},\cdots,v_2^{(\nu)},\cdots,v^{(n)})$$

と定義する．

定義6：h を定義域が2つの集合の直積で表わされている写像：$A^{(1)}\times A^{(2)}\to B$ とする．このとき，h より導びかれる写像 $\hat{h}:A^{(1)}\to\{A^{(2)}\to B\}$ を $\hat{h}(a^{(1)})(a^{(2)})=h(a^{(1)},a^{(2)})$ と定義する．ここで，$a^{(1)}\in A^{(1)}$，$a^{(2)}\in A^{(2)}$ である．

補題4：φ が細分的であれば，任意の $\nu\in N_0$ に対して，$V^{(\nu)}/\!/\varphi=V^{(\nu)}/e$ である．

以下，$n=2$ として議論をすすめる．次の定理5，6は容易に $n>2$ の場合に拡張される．また以下の議論は $V^{(1)}$ と $V^{(2)}$ をとりかえても全く同様に成立する．

定理5：φ を $V^{(2)}/\!/\varphi = V^{(2)}/e$ なる構造とする．φ が細分的であるための必要十分条件は，任意の $\pi^{(1)} \in \Pi^{(1)} - \{e\}$ に対して，$\varphi' = (\pi^{(1)}, e)\varphi$ とおくとき，$\{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} \neq \{\hat{\varphi}'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ なることである．

（証明）<u>必要性</u>　φ を細分的とし，$\pi^{(1)}(\neq e)$ に対して，$\varphi' = (\pi^{(1)}, e)\varphi$ とおくとき，$\{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} = \{\hat{\varphi}'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ と仮定する．このとき，各 $v^{(2)}_\nu \in V^{(2)}$ に対して $\hat{\varphi}(v^{(2)}_\nu) = \hat{\varphi}'(v^{(2)}_{\xi_\nu})$ なる $v^{(2)}_{\xi_\nu} \in V^{(2)}$ が存在する．$V^{(2)} = \{v^{(2)}_1, \cdots, v^{(2)}_{2^{(2)}}\}$，$\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} v^{(2)}_1 & \cdots & v^{(2)}_{2^{(2)}} \\ v^{(2)}_{\xi_1} & \cdots & v^{(2)}_{\xi_{2^{(2)}}} \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$\varphi = (e, \pi^{(2)}) \cdot \varphi'$．したがって，$\varphi = (e, \pi^{(2)})\varphi' = (e, \pi^{(2)})(\pi^{(1)}, e)\varphi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)})\varphi$．ここに $\pi^{(1)} \neq e$ であるから，φ が細分的であることに矛盾する．

<u>十分性</u>　定理の条件を仮定する．$(\pi^{(1)}_1, \pi^{(2)}_1)\varphi = \varphi$ とする．$\pi^{(1)}_1 \neq e$ ならば仮定より，$(\pi^{(1)}_1, \pi^{(2)}_1)\varphi = \varphi$ なる $\pi^{(2)}_1$ は存在しないから，$\pi^{(1)}_1 = e$ となる．$V^{(2)}/\!/\varphi = V^{(2)}/e$ より，$(e, \pi^{(2)}_1)\varphi = \varphi$ なら $\pi^{(2)}_1 = e$ となるから，結局 $(\pi^{(1)}_1, \pi^{(2)}_1) = e$ となる．したがって，定義3より φ は細分的となる．　　（証明終）

定義7：写像 $h: A \to B$ に対して，$\mathrm{tuple}(h) = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(M)})$

を次のように定義する．すなわち，$B=\{b_1,\cdots,b_\mu\}$ とするとき，$\nu=1,\cdots,\mu$ に対して $\xi^{(\nu)}=|\{a\in A \mid h(a)=b_\nu\}|$ とする．

すべての写像：$V^{(1)}\to U$ からなる集合をHで，その元をhで表わす．

$$\mathbb{H}_{(i^{(1)},\cdots,i^{(\lambda)})}=\{h\in H \mid tuple(h)=(i^{(1)},\cdots,i^{(\lambda)})\}$$

とおく．さらに

$$\mathbb{H}^{\varphi}_{(i^{(1)},\cdots,i^{(\lambda)})}=\{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)}\in V^{(2)}\}\cap\mathbb{H}_{(i^{(1)},\cdots,i^{(\lambda)})}$$

とおく．ここで，$|U|=\lambda$，$|V^{(1)}|=\zeta^{(1)}=\sum_{\nu=1}^{\lambda} i^{(\nu)}$ である．

$$|\{tuple(h) \mid h\in H\}|=\binom{\zeta^{(1)}+\lambda-1}{\lambda-1},\quad |\mathbb{H}_{(i^{(1)},\cdots,i^{(\lambda)})}|=\frac{\zeta^{(1)}!}{i^{(1)}!\cdots i^{(\lambda)}!}$$

となる．$p=\binom{\zeta^{(1)}+\lambda-1}{\lambda-1}$ とおき，$\{tuple(h) \mid h\in H\}=\{i_1,\cdots,i_p\}$ と表わす．ここで，$i_1=(i^{(1)}_1,\cdots,i^{(n)}_1),\cdots,i_p=(i^{(1)}_p,\cdots,i^{(n)}_p)$ である．与えられたφに対して，一般性を失うことなく

$i\in\{i_1,\cdots,i_s\}$ なるtuple に対して，$\mathbb{H}^{\varphi}_i\neq\phi$

$i\in\{i_{s+1},\cdots,i_p\}$ なるtuple に対して，$\mathbb{H}^{\varphi}_i=\phi$

とする．各 $\varphi\in\Phi$，$i\in\{tuple(h) \mid h\in H\}$ に対して，写像 $\delta^{\varphi}_i:\{0,1\}\to\{|\mathbb{H}^{\varphi}_i|,\ |\mathbb{H}_i|-|\mathbb{H}^{\varphi}_i|\}$ を

$$\delta^{\varphi}_i(0)=|\mathbb{H}^{\varphi}_i|,\quad \delta^{\varphi}_i(1)=|\mathbb{H}_i|-|\mathbb{H}^{\varphi}_i|$$

と定義する．$B=\{0,1\}$ とおく．

定理6：φを，$(\zeta^{(1)},\zeta^{(2)})$素子の細分的構造とする．任意の

$(b^{(1)}, \cdots, b^{(s)}) \in B^s$ および $0 \leq \xi \leq \sum_{\nu=s+1}^{p} |h_{i_\nu}|$ なる任意の整数 ξ に対して, $\zeta^{(2)\prime} = \sum_{\nu=1}^{s} \delta_{i_\nu}^{\varphi}(b^{(\nu)}) + \xi$ とおくとき, $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)\prime})$ 素子は細分的である.

(証明) φ が細分的であるから, 補題4より $V^{(2)}/\!/\varphi = V^{(2)}/e$. 構造 φ_0 を, $\{\hat{\varphi}_0(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ が次の(i) および(ii) の写像: $V^{(1)} \to U$ からなるような $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)\prime})$ 素子の構造のひとつとする.

(i) $\nu = 1, \cdots, s$ に対して

$b^{(\nu)} = 0$ ならば, $h_{i_\nu}^{\varphi}$ に含まれるすべての写像

$b^{(\nu)} = 1$ ならば, $h_{i_\nu} - h_{i_\nu}^{\varphi}$ に含まれるすべての写像

(ii) $\{h \in H \mid tuple(h) \in \{i_{s+1}, \cdots, i_p\}\}$ の中から勝手にえらばれた ξ 個の写像.

上述の(i) および(ii)の写像は全部で $\zeta^{(2)\prime}$ 個存在するから, 明らかに $V^{(2)}/\!/\varphi_0 = V^{(2)}/e$ である. さらにこの構造 φ_0 は細分的である. なぜならば, φ_0 が細分的でないとすると, 定理5より, $\pi^{(1)} (\neq e)$ が存在して $\varphi_0' = (\pi^{(1)}, e)\varphi_0$ とおくとき $\{\hat{\varphi}_0(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} = \{\hat{\varphi}_0'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ となる. このとき, φ_0 の構成の仕方より明らかなように, $\varphi' = (\pi^{(1)}, e)\varphi$ とおくと, $\{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} = \{\hat{\varphi}'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$. 定理5より, これは φ が細分的であることに矛盾する. (証明終)

系: $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$ 素子が細分的となるための必要十分条件は

$(\zeta^{(1)}, \lambda^{\zeta^{(1)}} - \zeta^{(2)})$素子が細分的となることである.†

定義8†: $\beta(\zeta^{(1)})$を, $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$素子が細分的となるような最小の$\zeta^{(2)}$の値と定義する.

定義8のβは次のアルゴリズム7で求められる. そしてこのことを証明するのが本論文の目標である.

アルゴリズム7†:

(1) $\zeta^{(1)} = 1$, $\beta(1) = 0$

(2) $\zeta^{(1)} = \zeta^{(1)} + 1$

(3) $\beta(\zeta^{(1)}) = \min\{\nu \mid \zeta^{(1)} \le \lambda^{\nu} - \beta(\nu)\}$

(2)へ.

補題8: $\beta(\mu)$はアルゴリズム7で定義可能である. さらに$g(\mu) = \lambda^{\mu} - \beta(\mu)$とおくとき, $g(\mu)$は$\mu \ge 1$で狭義の単調増加関数で, かつ

$$\beta(\mu) < g(\mu) = \lambda^{\mu} - \beta(\mu)$$

---

† $\zeta^{(1)} = 1$, $\zeta^{(2)} = \lambda$のとき, $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$素子は細分的である. このとき, $\lambda^{\zeta^{(1)}} - \zeta^{(2)} = 0$となり, 定理6の系より, $(1, 0)$素子も細分的となる. $\lambda^{\zeta^{(1)}} - \zeta^{(2)} = 0$かつ$(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$素子が細分的となるのは, $\zeta^{(1)} = 1$のときのみであるので, 定義8, アルゴリズム7との関連で, $\zeta^{(1)} = 1$のときのみ$(\zeta^{(1)}, 0)$素子を形式的に考えて, この素子は細分的であると考える.

が成立する．

補題8より，次の補題が成立する．

補題9：$\beta(\mu)$はアルゴリズム7で定義されるとする．$\mu \geq 1$に対して，$\lambda^{\mu-1} \leq g(\mu) = \lambda^{\mu} - \beta(\mu)$　が成立する．

これらの補題より，次の定理が証明される．

定理10：$\beta(\mu)$はアルゴリズム7で定義されるとする．このとき

$$\lceil \log_\lambda \mu \rceil \leq \beta(\mu) \leq \lceil \log_\lambda \mu \rceil + 1$$

が成立する．ただし，$\lceil x \rceil$はxより小さくはない最小の整数を表わす．

（証明）$\mu = 1$ のとき，$\lceil \log_\lambda 1 \rceil = 0 \leq \beta(1) \leq \lceil \log_\lambda 1 \rceil + 1$.

$2 \leq \mu \leq \lambda$ のとき，アルゴリズム7より$\beta(\mu) = 1$であるから

$$\lceil \log_\lambda \mu \rceil = 1 \leq \beta(\mu) \leq \lceil \log_\lambda \mu \rceil + 1.$$

$\lambda < \mu$ のとき，$g(1) = \lambda^1 - \beta(1) = \lambda < \mu$ であるから，アルゴリズム7および補題8より，$g(\nu-1) = \lambda^{\nu-1} - \beta(\nu-1) < \mu \leq \lambda^{\nu} - \beta(\nu) = g(\nu)$ を満足するνが$\beta(\mu)$の値である．ν_1を，$\lambda^{\nu_1 - 1} < \mu \leq \lambda^{\nu_1}$ なる整数とすると，$\nu_1 \leq \beta(\mu) = \nu$．しかるに $\nu_1 - 1 < \log_\lambda \mu \leq \nu_1$ であるから，$\nu_1 = \lceil \log_\lambda \mu \rceil$．したがって，$\lceil \log_\lambda \mu \rceil \leq \beta(\mu)$．また補題9より，$\lambda^{\nu-2} \leq g(\nu-1)$, $\lambda^{\nu-1} \leq g(\nu)$ であるから，ν_2を$\lambda^{\nu_2 - 2} < \mu \leq \lambda^{\nu_2 - 1}$ なる整数とすると，$\beta(\mu) = \nu \leq \nu_2 = \lceil \log_\lambda \mu \rceil + 1$.　（証明終）

系：$\beta(\mu)$ はアルゴリズム7で定義されるとすると，$\beta(\mu)\le\mu$ が成立する．

次の補題は，定理6の系および定義8より明らかである．

補題11：$(\zeta^{(1)},\zeta^{(2)})$ 素子が細分的であれば，$\zeta^{(2)}\le\lambda^{\zeta^{(1)}}-\beta(\zeta^{(1)})$ が成立する．ここで，$\beta(\zeta^{(1)})$ は定義8で定義されるとする．

次の定理12が証明されれば，アルゴリズム7は定義8の $\beta(\zeta^{(1)})$ を与えるものであること（定理13）を証明することができる．定理12の証明は付録にまわす．

定義9：φ を $(\zeta^{(1)},\zeta^{(2)})$ 素子の構造とする．$\zeta^{(2)}\le\nu\le\lambda^{\zeta^{(1)}}-\zeta^{(2)}$ なる任意の ν に対して，$(b^{(1)},\cdots,b^{(s)})\in B^s$ および $0\le\xi\le\sum_{\mu=s+1}^{p}|h_{i_\mu}|$ なる整数 ξ が存在して $\nu=\sum_{\mu=1}^{s}\delta^{\varphi}_{i_\mu}(b^{(\mu)})+\xi$ となるとき，φ を *expressive* という．ただし，$i\in\{i_1,\cdots,i_s\}$ に対して $h^{\varphi}_{i}=\phi$，$i\in\{i_{s+1},\cdots,i_p\}$ に対して $h^{\varphi}_{i}=\phi$ とする．

定理12：$\beta(\zeta^{(1)})$ はアルゴリズム7で定義されるものとする．このとき，$(\zeta^{(1)},\beta(\zeta^{(1)}))$ 素子の任意の構造は *expressive* である．

定理13：アルゴリズム7は定義8の $\beta(\zeta^{(1)})$ を与える．

（証明）$\zeta^{(1)}$ に関して帰納的に証明する．

$1\le\zeta^{(1)}\le\lambda$ に関して，定理が成立するのは明らかである．

$\beta(\zeta^{(1)})$，$\beta'(\zeta^{(1)})$ をそれぞれ定義8，アルゴリズム7で与えられるものとする．$\zeta^{(1)}\le\mu$ に対して，$\beta(\zeta^{(1)})=\beta'(\zeta^{(1)})$ を

仮定して，$\beta(\mu+1)=\beta'(\mu+1)$ を証明する．$\beta'(\mu+1)=\min\{\nu \mid \mu+1\leq\lambda^{\nu}-\beta'(\nu)\}$ となる．ここで，$\beta'(\mu+1)=\xi'$ とおくと $\mu+1\leq\lambda^{\xi'}-\beta'(\xi')$．さらに定理10の系，および β はアルゴリズムで定義可能（補題9）であることより，$\beta'(\xi')\leq\xi'\lneqq\mu+1$．したがって，帰納法の仮定，定理12，定理6および補題3より，$(\xi',\mu+1)$ 素子および $(\mu+1,\xi')$ 素子は細分的である．したがって，定義8より $\beta(\mu+1)\leq\xi'=\beta'(\mu+1)$．しかるに $\beta(\mu+1)\lneqq\beta'(\mu+1)$ を仮定すると $\beta'(\mu+1)$ の最小性に矛盾する．なぜならば，$(\beta(\mu+1),\mu+1)$ 素子が細分的であるから，補題11および帰納法の仮定より，$\beta(\mu+1)=\xi$ とおくと，$\mu+1\leq\lambda^{\xi}-\beta(\xi)=\lambda^{\xi}-\beta'(\xi)$ となるからである．(証明終)

定理6，12より，次の定理をうる．

定理14：$(\zeta^{(1)},\zeta^{(2)})$ 素子が細分的となるための必要十分条件は，$\beta(\zeta^{(1)})\leq\zeta^{(2)}\leq\lambda^{\zeta^{(1)}}-\beta(\zeta^{(1)})$ なることである．

§4　一般の場合の細分的条件を求めるアルゴリズム

$n\geq3$ の場合も §3 とほぼ同様に論じられる．ここでは，その結果のみをのべる．以下記号を簡単にするため，$(n+1)$ 個の入力端子を有する素子について考えることにし，$n\geq2$ とする．

定義10：$\beta(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)})$ を，$(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)},\zeta^{(n+1)})$ 素子が細分的

となるような最小の $z^{(n+1)}$ の値と定義する．

定義11：集合 $\{(z^{(1)},\dots,z^{(n)}) \mid 2\le z^{(1)}\le\cdots\le z^{(n)}\}$ に次のような2項関係を定義する．$z_1=(z_1^{(1)},\dots,z_1^{(n)})$，$z_2=(z_2^{(1)},\dots,z_2^{(n)})$ とおく．

(i) $n=1$ のとき，$z_1\le z_2 \Leftrightarrow z_1^{(1)}\le z_2^{(1)}$

(ii) $n\ge 2$ のとき，

$$z_1\le z_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} z_1^{(n)} \lneq z_2^{(n)}\text{，または} \\ z_1^{(n)}=z_2^{(n)}\ \text{かつ}\ (z_1^{(1)},\dots,z_1^{(n-1)})\le(z_2^{(1)},\dots,z_2^{(n-1)}) \end{array}$$

定義12：$z^{(1)},\dots,z^{(n)}$ を大きさの順にならべたものを $z^{(\xi_1)}$，$z^{(\xi_2)},\dots,z^{(\xi_n)}$ とするとき（すなわち，$z^{(\xi_1)}\le\cdots\le z^{(\xi_n)}$），

$$\langle z^{(1)},\dots,z^{(n)}\rangle=(z^{(\xi_1)},\dots,z^{(\xi_n)})$$

と定義する．

次のアルゴリズムは，$\beta(z^{(1)},\dots,z^{(n-1)})$ および $(z^{(1)\prime},\dots,z^{(n)\prime}) \lneq (z^{(1)},\dots,z^{(n)})$ なる任意の $(z^{(1)\prime},\dots,z^{(n)\prime})$ に対して $\beta(z^{(1)\prime},\dots,z^{(n)\prime})$ が求められていると仮定して，$\beta(z^{(1)},\dots,z^{(n)})$ を求めるものである．ただし，$2\le z^{(1)\prime}\le\cdots\le z^{(n)\prime}$，$2\le z^{(1)}\le\cdots\le z^{(n)}$ とする．

アルゴリズム15[†]：$2\le n$，$2\le z^{(1)}\le\cdots\le z^{(n-1)}$ とする．

(1) $z^{(n-1)}\le z^{(n)}\le \lambda^{z^{(1)}\cdots z^{(n-1)}} - \beta(z^{(1)},\dots,z^{(n-1)})$ なる $z^{(n)}$ に対

---

† アルゴリズム15において，$n=1$ のときは $z^{(n-1)}=0$，$\beta(z^{(1)},\dots,z^{(n-1)})=0$，$\lambda^{z^{(1)}\cdots z^{(n-1)}}=\lambda$ とおくと，このアルゴリズムはアルゴリズム7に一致することに注意されたい．

して，$\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})=1$．

(2) $z^{(n)}=\lambda^{z^{(1)}\cdots z^{(n-1)}}-\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n-1)})$．

(3) $z^{(n)}=z^{(n)}+1$．

(4) $\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n-1)},z^{(n)})=\min\{\nu \mid z^{(n)}\leq\lambda^{z^{(1)}\cdots z^{(n-1)}\nu}$

$-\beta(\langle z^{(1)},\cdots,z^{(n-1)},\nu\rangle)\}$．

ただし，$\beta(\langle z^{(1)},\cdots,z^{(n-1)},1\rangle)=\beta(\langle z^{(1)},\cdots,z^{(n-1)}\rangle)$ とする．

(3)へ．

定理16：$\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})$ をアルゴリズム15で求まるものとし，$2\leq z^{(1)}\leq\cdots\leq z^{(n)}$ とする．このとき

$$\left\lceil\frac{\log_\lambda z^{(n)}}{z^{(1)}\cdots z^{(n-1)}}\right\rceil\leq\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})\leq\left\lceil\frac{\log_\lambda z^{(n)}}{z^{(1)}\cdots z^{(n-1)}}\right\rceil+1$$

が成立する．

定理17：アルゴリズム15は，定義10の $\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})$ を与える．

アルゴリズム15はすべての $z^{(1)},\cdots,z^{(n)}$ の組合せに対して，$\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})$ を与えるものではない．しかし，$2\leq z^{(1)}\leq\cdots\leq z^{(n)}$ なる $z^{(1)},\cdots,z^{(n)}$ に対しては，定義10とアルゴリズム15は同じ値を与えるということを定理17は保証する．しかるに，任意の $\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})$ に対して，$z^{(1)},\cdots,z^{(n)}$ のうち1なるものは除き残りを小さいものから順次ならべたものを $z^{(1)'},\cdots,z^{(m)'}$ とすると $\beta(z^{(1)},\cdots,z^{(n)})=\beta(z^{(1)'},\cdots,z^{(m)'})$ となる．ここに，$2\leq z^{(1)'}\leq\cdots\leq z^{(m)'}$ である．

定理18：$(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)},\zeta^{(n+1)})$素子が細分的となるための必要十分条件は，$\beta(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)}) \leq \zeta^{(n+1)} \leq \lambda^{\zeta^{(1)}\cdots\zeta^{(n)}} - \beta(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)})$なることである．ここで，$\beta$は定義10で定義されるものである．

§5　むすび

多値論理素子が細分的であることと可変論理回路との関連についてのべ，細分的であるための必要十分条件を与えるアルゴリズムを導びいた．

謝辞　御討論いただいた東北大学木村正行教授，ならびに本多，木村両研究室の諸氏に深謝する．

文　献

(1) 丸岡，本多；"可変論理回路の構造の類別" 信学論(C)，54-C，7，P.549（昭和46-7）．

(2) 丸岡，本多；"可変論理回路の構造の可変範囲" 信学論(C)，55-D，1，P.1（昭和47-01）．

付　録

定理12の証明

補題19：$\beta(\zeta^{(1)})$をアルゴリズム7で求められるものとするとき，$(\zeta^{(1)},\beta(\zeta^{(1)}))$素子の$s=\tau$なる任意の構造がexpressive

であれば†, $(\gamma^{(1)}, \beta(\gamma^{(1)}))$ 素子の $s = \tau - 1$ なる任意の構造が expressive となる.

$\{tuple(h) \mid h \in H\} = \{i'_1, \cdots, i'_p\}$, $|h_{i'_1}| \le \cdots \le |h_{i'_p}|$ とし, $|h_{i'_1}| = l_1, \cdots, |h_{i'_p}| = l_p$ とおく. すなわち, $\{i'_1, \cdots, i'_p\}$ は $|h_{i'}|$ の大きさの順に $\{i_1, \cdots, i_p\}$ のサフィックスをつけかえたものである.

$\{k_1, \cdots, k_s\} = \{k \mid k \in \{1, \cdots, p\}, h^{\varphi}_{i'_k} \neq \phi\}$

$\{j_1, \cdots, j_r\} = \{1, \cdots, p\} - \{k_1, \cdots, k_s\} = \{j \mid j \in \{1, \cdots, p\}, h^{\varphi}_{i'_j} = \phi\}$

$k_1 < \cdots < k_s$

とおく. ここで, $s + r = p$ である. このとき次の補題が成立する.

補題20: φ を, $h^{\varphi}_{i} \neq \phi$ なる任意の h^{φ}_{i} に対して $|h^{\varphi}_{i}| = 1$ となる $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$ 素子の構造とする(この場合, $s = \gamma^{(2)}$ となる). このとき

$$(l_{j_1} + \cdots + l_{j_r}) - \max\{l_{k_s} - l_{k_{s-1}}, \cdots, l_{k_2} - l_{k_1}, l_{k_1}\} \geq 0$$

ならば, φ は expressive である.

補題21: $l_1, \cdots, l_p$ は, $1 \le l_1 \le \cdots \le l_p$ なる整数, s は $1 \le s \le p$ なる整数とする. 大きさ s の集合 $\{k_1, \cdots, k_s\} \subseteq \{1, \cdots, p\}$ に整数

$$(l_{j_1} + \cdots + l_{j_r}) - \max\{l_{k_s} - l_{k_{s-1}}, \cdots, l_{k_2} - l_{k_1}, l_{k_1}\} \qquad (1)$$

---

† s は, $h^{\varphi}_{i} \neq \phi$ となるような λ-tuple i の個数である.

を対応させる．ここで，

$$s+r=p\ ,\ k_1<\cdots<k_s\ ,\ \{1,\cdots,p\}-\{k_1,\cdots,k_s\}=\{j_1,\cdots,j_r\}$$

とする．このとき，$\{r+1,r+2,\cdots,p\}$ は(1)で与えられる対応する整数を最小にする大きさ s の $\{1,\cdots,p\}$ の部分集合のひとつである．

補題22：$\lambda=2$ のとき $q^{(1)}\geq 8$ ，$\lambda\geq 3$ のとき $q^{(1)}\geq 2$ とする．$|h_{i_1}|\leq\cdots\leq|h_{i_p}|$ とし，$|h_{i_1}|=l_1,\cdots,|h_{i_p}|=l_p$，$r=p-\beta(q^{(1)})$ とおくとき

$$(l_1+\cdots+l_r)-\max\{l_p-l_{p-1},\cdots,l_{r+2}-l_{r+1},\ l_{r+1}\}\geq 0$$

が成立する．ただし，$\beta(q^{(1)})$ はアルゴリズム7で与えられるとする．

以上の準備のもとに定理12を証明する．

（定理12の証明）$\lambda=2$，$1\leq q^{(1)}\leq 7$ および $\lambda\geq 3$，$q^{(1)}=1$ のときは，定理12の成立することを実際に確めることができる．その他の場合については，補題20，21，22より，$(q^{(1)},\beta(q^{(1)}))$ 素子の $s=\beta(q^{(1)})$ なる任意の構造は expressive となる．さらにこのとき，補題19より $(q^{(1)},\beta(q^{(1)}))$ 素子の任意の構造は expressive となる．　　　　　　　　　　　　　　（証明終）